

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Systèmes d'équations différentielles héréditaires à retards fixes. Théorèmes d'existence et d'unicité.*

Note (*) de MM. MICHEL DELFOUR et SANJOY MITTER, présentée par M. Jean Leray.

Espaces de fonctions requis. Formulation unifiée des problèmes global et local de Cauchy dans un Banach. Théorème d'existence pour les systèmes du type Carathéodory et théorème d'existence et d'unicité pour les systèmes du type Lipschitz. Continuité de la solution par rapport à la donnée initiale.

1. ESPACES DE FONCTIONS. — Nous utiliserons la théorie de l'intégration et des espaces L^p à valeurs dans un Banach E développée par S. Lang (1). Pour $\alpha < \beta$ dans $[-\infty, +\infty]$ nous définissons $I(\alpha, \beta)$ comme l'intersection de $[\alpha, \beta]$ et de l'ensemble \mathbb{R} des réels. $\mathcal{L}^p(\alpha, \beta; E)$ sera l'espace vectoriel des applications $I(\alpha, \beta) \rightarrow E$ qui sont m -mesurables (m , la mesure de Lebesgue pour \mathbb{R}) et p -intégrables, $1 \leq p < \infty$, ou bornées presque partout, $p = \infty$; l'espace de Banach obtenu en passant au quotient sera dénoté par $L^p(\alpha, \beta; E)$ et la norme L^p par $\|\cdot\|_p$.

Supposons b dans $]0, +\infty[$. Nous voulons passer de données initiales dans $C(-b, 0; E)$ à des données qui soient p -intégrables. Pour cela nous introduisons dans $\mathcal{L}^p(-b, 0; E)$ la semi-norme

$$n_p(y) = [|y(0)|^p + \|y\|_p^p]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

et formons l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(-b, 0; E)$ par le sous-espace linéaire formé des éléments y tels que $n_p(y) = 0$. Ce dernier sera noté $M^p(-b, 0; E)$ et sa norme $\|\cdot\|_M^p$. Il existe un isomorphisme entre cet espace et le produit $E \times L^p(-b, 0; E)$.

Finalement nous précisons l'espace dans lequel nous chercherons nos solutions. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $t_1 \in]t_0, +\infty[$. Pour $t \in]t_0, t_1[$ soit $AC^p(t_0, t; E)$ l'espace vectoriel de toutes les applications $x : [t_0, t] \rightarrow E$ dont la dérivée existe dans $\mathcal{L}^p(t_0, t; E)$ et pour lesquelles

$$x(s) = x(t_0) + \int_{t_0}^s \frac{dx}{du}(u) du, \quad s \in [t_0, t].$$

Équipé de la norme

$$\|x\|_{AC^p} = \left[|x(t_0)|^p + \int_{t_0}^t \left| \frac{dx}{ds}(s) \right|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$AC^p(t_0, t; E)$ est isomorphe à $E \times L^p(t_0, t; E)$. Nous aurons aussi besoin de $C(t_0, t; E)$, l'espace de Banach formé des applications continues de $[t_0, t]$ dans E , dont la norme sera écrite $\|\cdot\|_C$.

Soit $\tau_t(x)$ la restriction d'une application $x : [t_0, t_1[\rightarrow E$ à l'intervalle $[t_0, t]$ pour $t \in]t_0, t_1[$. Soient $L_{loc}^p(t_0, t_1; E)$, $AC_{loc}^p(t_0, t_1; E)$ et $C_{loc}(t_0, t_1; E)$ les espaces vectoriels des applications $x : [t_0, t_1[\rightarrow E$ tel que pour tout $t \in]t_0, t_1[$ $\tau_t(x)$ soit dans $L^p(t_0, t; E)$, $AC^p(t_0, t; E)$ et $C(t_0, t; E)$, respectivement. Ce sont des espaces de Fréchet quand leur topologie est définie par la famille de semi-normes $q_t(x) = \|\tau_t(x)\|_F$, $t \in]t_0, t_1[$, où F est L^p , AC^p ou C selon le cas.

2. FORMULATION DU PROBLÈME DE CAUCHY. — Nous nous donnons un entier $N \geq 1$, des réels $a > 0$ et $-a = \theta_N < \dots < \theta_1 < \theta_0 = 0$ et un espace de Banach E . Dans les définitions suivantes nous désignerons par b , soit le réel a ou $+\infty$. Nous nous donnons aussi p , $1 \leq p < \infty$, h dans $M^p(-b, 0; E)$ et une application

$$f : [t_0, t_1[\times B^p(-b, 0; E) \rightarrow E, \quad \text{où } t_0 \in \mathbb{R}, \quad t_1 \in [t_0 + a, +\infty[$$

et

$$B^p(-b, 0; E) = E^N \times M^p(-b, 0; E).$$

Le problème global de Cauchy dans $[t_0, t_1[$ pour l'application f et la donnée initiale h au temps t_0 consiste à déterminer x dans $AC_{loc}^1(t_0, t_1; E)$ tel que $x(t_0) = h(0)$ et que l'application \tilde{x} définie par

$$\tilde{x}(s) = \begin{cases} h(s - t_0), & s \in I(t_0 - b, t_0), \\ x(s), & s \in]t_0, t_1[\end{cases}$$

satisfasse l'équation

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(t, \tilde{x}(t + \theta_N), \dots, \tilde{x}(t + \theta_1), \tilde{x}(t)) \quad \text{p. p. dans } [t_0, t_1[$$

où $\tilde{x}_t(\theta) = \tilde{x}(t + \theta)$, $\theta \in I(-b, 0)$. Un tel x est une *solution globale*.

Le problème local de Cauchy dans $[t_0, t_1[$ pour f et h consiste à déterminer un réel α , $0 < \alpha < t_1 - t_0$, tel que le problème de Cauchy dans $[t_0, t_0 + \alpha]$ ait une solution globale dans $AC^1(t_0, t_0 + \alpha; E)$ pour la donnée initiale h au temps t_0 .

Nous écrirons M^p et C_{loc} au lieu de $M^p(-b, 0; E)$ et $C_{loc}(t_0, t_1; E)$. $M^p \circ C_{loc}$ sera le sous-espace linéaire fermé de tous les (h, x) dans $M^p \times C_{loc}$ tel que $x(t_0) = h(0)$. L'application $s \mapsto (h \circ x)_s : [t_0, t_1[\rightarrow M^p$ définie par

$$(h \circ x)_s(\theta) = \begin{cases} h(s - t_0 + \theta) & \text{pour } \theta \in I(-b, 0) \setminus [-(s - t_0), 0], \\ x(s + \theta) & \text{pour } \theta \in I(-b, 0) \cap [-(s - t_0), 0] \end{cases}$$

sera appelée *application mémoire* de $(h, x) \in M^p \circ C_{loc}$ et nous la dénotons par $h \circ x$.

A la lumière de cette dernière définition le problème global de Cauchy peut être reformulé comme suit. Étant donnés f et h le problème global

de Cauchy consiste à déterminer un x dans $AC_{loc}^1(t_0, t_1; E)$ tel que l'application mémoire $h \circ x$ pour (h, x) dans $M^p \circ C_{loc}$ satisfasse l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, \sigma(h, x)(t)) \quad \text{p. p. dans } [t_0, t_1[,$$

où l'application

$$\sigma : M^p \circ C_{loc} \rightarrow L_{loc}^q(t_0, t_1; B^p(-b, 0; E))$$

est définie par

$$\sigma(h, x)(t) = ((h \circ x)_t(\theta_N), \dots, (h \circ x)_t(\theta_1), (h \circ x)_t).$$

3. RÉSULTATS. — Dans les théorèmes et corollaires suivants $b, a, p, E, t_0, t_1, \pi_t, \sigma, h$ et f sont définis comme dans le paragraphe 2.

THÉORÈME 1. — *Supposons que f ait les propriétés suivantes :*

(CAR-1) *L'application $t \mapsto f(t, z)$ est m -mesurable pour tout z dans $B^p(-b, 0; E)$;*

(LIP) *Il existe une fonction non négative n dans $L_{loc}^q(t_0, t_1; R)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tel que pour tous z_1 et z_2 dans $B^p(-b, 0; E)$*

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq n(t) \|z_1 - z_2\|_{B^p}$$

p. p. dans $[t_0, t_1[$;

(BC) *L'application $t \mapsto f(t, 0)$ est un élément de $L_{loc}^1(t_0, t_1; E)$.*

Alors il existe une solution globale unique $\varphi(h)$ dans $AC_{loc}^1(t_0, t_1; E)$ au problème de Cauchy. De plus, l'application

$$h \mapsto \varphi(h) : M^p(-b, 0; E) \rightarrow AC_{loc}^1(t_0, t_1; E)$$

est continue et pour tout t dans $]t_0, t_1[$

$$\|\pi_t(\varphi(h) - \varphi(k))\|_{AC^1} \leq d(p, t - t_0) \|h - k\|_{M^p}$$

pour une constante $d(p, t - t_0) > 0$. ■

COROLLAIRE. — *Si $n \in L^q(t_0, t_1; R)$ et $t \mapsto f(t, 0)$ est dans $L^1(t_0, t_1; E)$ la solution $\varphi(h)$ est dans $AC^1(t_0, t_1; E)$. ■*

THÉORÈME 2. — *Supposons que pour f et h :*

(CAR-1) *L'application $t \mapsto f(t, z)$ soit m -mesurable pour tout z ;*

(CAR-2) *et que l'application $z \mapsto f(t, z)$ soit continue pour presque tout t dans $[t_0, t_1[$;*

(CAR-3) Soit V un sous-ensemble convexe fermé et non vide de $C_{loc}(t_0, t_1; E)$. Supposons qu'il existe une fonction non négative m (dépendante de V) dans $L^1_{loc}(t_0, t_1; R)$ tel que

$$(a) \quad V_m = \left\{ x \in C_{loc} \mid x(t_0) = h(o), \right. \\ \left. \max_{t_0 \leq t} |x(s) - h(o)| \leq \int_{t_0}^t m(s) ds, \quad \forall t \in]t_0, t_1[\right\} \text{ soit un sous-}$$

ensemble de V et que

$$(b) \quad \text{pour tout } x \in V_0 = \{ x \in V \mid x(t_0) = h(o) \}, \\ |f(t, \tau(h, x)(t))| \leq m(t) \quad p. p. \text{ dans } [t_0, t_1].$$

Alors il existe au moins une solution globale $\varphi(h)$ dans $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ au problème de Cauchy avec donnée initiale h au temps t_0 . ■

COROLLAIRE. — Si $m \in L^1(t_0, t_1; R)$ la solution globale est dans $AC^1(t_0, t_1; E)$. ■

THÉORÈME 3. — Supposons que les hypothèses (CAR-1) et (CAR-2) pour f soient satisfaites. Soit $N(h)$ un voisinage de h dans $M^p(-b, o; E)$. Comme dans le théorème 2 nous supposons l'existence d'un sous-ensemble convexe fermé de C_{loc} et d'une fonction m non négative dans $L^1_{loc}(t_0, t_1; R)$ tel que les hypothèses (a) et (b) du théorème 2 soient satisfaites pour tout élément de $N(h)$. Supposons enfin que la solution $\varphi(h)$ soit unique dans $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$. Alors pour toute suite $\{h_n\}$ dans $N(h)$ convergente vers h il existe une sous-suite de solutions $\{\varphi(h_{n_k})\}$ dans $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ qui converge vers $\varphi(h)$. ■

Les techniques utilisées pour prouver les théorèmes 1 et 2 s'inspirent de celles de A. Bielecki ⁽²⁾ et C. Corduneanu ⁽³⁾. Ceci explique l'abréviation (BC) dans le théorème 1.

(*) Séance du 11 janvier 1971.

(1) S. LANG, *Analysis II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

(2) A. BIELECKI, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, IV, 1956, p. 261-264.

(3) C. CORDUNEANU, *Funkcialaj Ekvacioj*, 9, 1966, p. 119-127.

(M. D. : Centre de Recherches
Mathématiques,
Université de Montréal,
Montréal 101,
Québec, Canada;

S. M. : Electronic Systems Laboratory,
Massachusetts Institute of Technology,
Cambridge,
Massachusetts 02139,
U. S. A.)